Relatividad y Gravitación, 2007
Prof. Máximo Bañados

Interrogación # 3

TIEMPO: 2 horas

Resuelva 3 de los 4 problemas

1. Considere el Lagrangiano,
$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{1}$$
y demuestre que las ecuaciones de Euler Lagrange,
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \tag{2}$$
son equivalentes a la ecuación de la geodésica.

2. Considere un espacio tiempo descrito por una métrica
$$ds^2 = -c^2\left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right) dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$
donde $\Phi(r)$ es una función de r. Encuentre la velocidad $v(r)$ que debe tener una partícula para orbitar este objeto a una distancia r constante. Suponga que $v(r) \ll c$. (El problema (1) es útil para este problema. De lo constrario utilice la tabla anexa.)

3. En la tarea 4 se demostró que, si ξ^μ es un vector de Killing, entonces $Q = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \xi^\nu$ es una constante de movimiento sobre las geodésicas. La métrica de Schwarzschild tiene un vector de Killing natural $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ que representa traslaciones en el tiempo. En este problema usaremos este resultado para derivar como varía la energía cinética de una partícula que remonta el campo gravitacional de un planeta de masa M, siguiendo una geodésica.

   Sean p_μ las componentes del 4-momentum de una partícula, medidas por un observador O. En relatividad especial, la componente cero de este vector es la energía de la partícula, medida por el observador O. Esto se puede escribir de manera más general, válida también en relatividad general, en la forma
$$E = -p_\mu u^\mu \tag{4}$$
   donde u^μ la 4-velocidad del observador ($u_\mu u^\mu = -1$!!).

   Entonces, una partícula con 4-momentum p_μ remonta el campo de un planeta a lo largo de una geodésica radial. La energía de la partícula es mediada por dos observadores a distancias r_1 y r_2 del planeta.

   (a) Encuentre $u(r_1)^\mu$ y $u(r_2)^\mu$ para estos observadores.

(b) Calcule

$$\frac{E(r_2)}{E(r_1)} \tag{5}$$

y exprese su resultado solo en términos de r_1, r_2 y M.

(c) (Opcional) Derive la fórmula para el redshift

4. Considere la métrica de un Universo en expansión,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \tag{6}$$

El tensor de Ricci de esta métrica es

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{3\ddot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{1}{1-kr^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{\theta\theta} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \end{aligned} \tag{7}$$

y el scalar de curvatura es

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \tag{8}$$

La dinámica del factor de escala $a(t)$ está controlada por la ecuación de Einstein con constante cosmológica,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{9}$$

Considere un fluído ideal de materia ($p = 0$) y demuestre que para valores positivos de Λ existe una solución estática para las ecuaciones (Universo de Einstein). Determine el valor de la densidad ρ en términos de Λ para que esta solución pueda existir.